流体揺らぎの現象論

東京工業大学応用物理
北原和夫

1. 序論

本稿では、流体力学揺らぎを記述するLandau-Lifshitz理論を非線形領域に拡張するために、質量密度、運動量密度、エネルギー密度など場の量に対するFokker-Planck方程式を求める。その際に、Fokker-Planck方程式が漸近的に $t \to \infty$ で平衡分布を与え、かつ平均値（一次のモーメント）に対する方程式が通常の流体方程式となるようにする。この二つの条件によってFokker-Planck方程式の形がほぼ決定できる。

2. 非平衡熱力学

まず、平衡熱力学において、内部エネルギー E、体積 V、化学成分 α の質量 M_α の関数としてエントロピーが定義される。

$$S = S(E, V, M_1, ..., M_c)$$

系の大きさを λ 倍すれば、

$$E \to \lambda E, \quad V \to \lambda V, \quad M_\alpha \to \lambda M_\alpha$$

となると同時にエントロピーも $S \to \lambda S$ となる。すなわち、

$$S(\lambda E, \lambda V, \lambda M_1, ..., \lambda M_c) = \lambda S(E, V, M_1, ..., M_c)$$

両辺を λ で微分してから $\lambda = 1$ とおくと、

$$E\frac{\partial S}{\partial E} + V\frac{\partial S}{\partial V} + \sum_\alpha M_\alpha \frac{\partial S}{\partial M_\alpha} = S$$

一方、熱力学関係式 $TdS = dE + pdV - \sum_\alpha \mu_\alpha dM_\alpha$ より

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial M_\alpha} = -\frac{\mu_\alpha}{T}$$

これより、

$$TS = E + pV - \sum_\alpha \mu_\alpha M_\alpha$$

これと、熱力学関係式より、

$$SdT = Vdp - \sum_{\alpha} M_\alpha d\mu_\alpha$$

両辺を体積Vでわると、

$$sdT = dp - \sum_{\alpha} \rho_\alpha d\mu_\alpha$$

ここで$s \equiv S/V$はエントロピー密度、$\rho_\alpha \equiv M_\alpha/V$は成分$\alpha$の質量密度である。また、

$$Ts = e + p - \sum_{\alpha=1}^{c} \mu_\alpha \rho_\alpha$$

これらふたつの関係式が非平衡熱力学の出発点となる。しかしながら、考える系が内部に質量流をもつものとすると、部分系は運動エネルギーを持つ。よって運動エネルギーと内部エネルギーを足した全エネルギー密度

$$\varepsilon \equiv e + \rho\frac{v^2}{2}$$

が保存量となる。これを用いて上の関係式を書き換えると、

$$Ts = \varepsilon - \rho\frac{v^2}{2} + p - \sum_{\alpha=1}^{c} \mu_\alpha \rho_\alpha$$

両辺を微分すると、

$$Tds + sdT = d\varepsilon + d(\rho\frac{v^2}{2}) + dp - \sum_{\alpha=1}^{c} d\mu_\alpha \rho_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{c} \mu_\alpha d\rho_\alpha$$

これより

$$ds = \frac{1}{T}d\varepsilon - (\frac{\mathbf{v}}{T}) \cdot d(\rho\mathbf{v}) - \sum_{\alpha=1}^{c} \frac{1}{T}(\mu_\alpha - \frac{v^2}{2})d\rho_\alpha$$

この微分式は次のような意味を持つ。一般にエントロピーSが保存量X_iの関数であるとき、エントロピーの微分

$$dS = \sum_{i} F_i dX_i$$

の係数 F_i を「熱力学的力」と呼ぶ。隣合う二つの部分系 A,B 間にある保存量 X の移動が起こるものとする。A から B に δX だけ移動したとすると全系のエントロピー変化は

$$[S_A(X_A-\delta X)+S_B(X_B-\delta X)-[S_A(X_A)+S_B(X_B)]$$
$$\simeq(-\frac{\partial S_A}{\partial X_A}+\frac{\partial S_B}{\partial X_B})\delta X=(-F_A+F_B)\delta X$$

ここで S_A は部分系 A のエントロピーを表し、S_B は部分系 B のエントロピーを表す。よって熱力学的力が増大する空間方向に保存量の付加逆的輸送が起こるということができる。つまり、エネルギーの付加逆的輸送である「熱」は $1/T$ が増大する方向に流れる。つまり温度が高いところから低いところへ熱は流れるのである。

3. 局所平衡の仮定

上に示した微小変化に対する式を実際の時間変化に対するものと解釈する。流体の流れに沿って動く質量要素の中での変化を記述するものとする。流体の流れに沿っての運動は

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t)=\mathbf{v}(\mathbf{X}(t),t)$$

となる。流れに沿って動く部分系内での物理量 φ の変化は

$$\frac{d}{dt}\varphi(\mathbf{X}(t),t)=\frac{\partial\varphi}{d\mathbf{r}}\cdot\frac{d\mathbf{X}}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=(\mathbf{v}\cdot\nabla)\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

となる。

$$\frac{D\varphi}{Dt}\equiv(\mathbf{v}\cdot\nabla)\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

を Lagrange 微分という。密度で表された熱力学的量に対する微分式は非平衡条件下で物理量の変化を表すものと見なされるが、熱力学の微分 d は Lagrange 微分として解釈すべきものである。つまり、エントロピーの時間変化は

$$\frac{Ds}{Dt}=\frac{1}{T}\frac{D\varepsilon}{Dt}-(\frac{\mathbf{v}}{T})\cdot\frac{D\mathbf{j}}{Dt}-\sum_{\alpha=1}^{c}\frac{1}{T}(\mu_\alpha-\frac{v^2}{2})\frac{D\rho_\alpha}{Dt}$$

右辺の各保存量の時間変化については、保存則として次のように表す。

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + div(\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0$$

ここで $\mathbf{v}_\alpha$ は成分 α の流速である。この流れの中で対流に乗らない部分を拡散流 $\mathbf{j}_\alpha$ と呼ぶ。

$$\rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{v} + \mathbf{j}_\alpha$$

成分について和をとると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{v}) = 0$$

ここで

$$\sum_{\alpha=1}^{c} \rho_\alpha = \rho, \quad \sum_{\alpha=1}^{c} \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \rho \mathbf{v}$$

運動量保存則は Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j + p\delta_{ij} - \sigma'_{ij}) = 0$$

である。ここで σ'_{ij} は粘性応力である。エネルギーについては

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + div(\varepsilon \mathbf{v} + p\mathbf{v} + \mathbf{j}_\varepsilon) = 0$$

$\mathbf{j}_\varepsilon$ はエネルギー流の中で対流に乗らない部分で不可逆過程による項である。これらを用いるとエントロピー密度の時間変化に対して

$$\frac{\partial s}{\partial t} + div\mathbf{j}_S = \sigma[S]$$

ここで $\mathbf{j}_S$ はエントロピー流で

$$\mathbf{j}_s = s\mathbf{v} + \frac{1}{T}[-\sum_\alpha (\mu_\alpha - \frac{v^2}{2})\mathbf{j}_\alpha + \mathbf{v} : \sigma' + \mathbf{j}_\varepsilon]$$

$\sigma[S]$ はエントロピー生成速度である。

$$\sigma[S] = -\sum_\alpha \mathbf{j}_\alpha \cdot grad(\frac{\mu_\alpha - v^2/2}{T}) + \sigma' : \nabla(\frac{\mathbf{v}}{T}) + \mathbf{j}_\varepsilon \cdot grad(\frac{1}{T})$$

となる。通常は、

$$\mathbf{j}_\varepsilon = \mathbf{Q} - \mathbf{v} : \sigma'$$

によって熱流 $\mathbf{Q}$ を定義する。こうすると、

$$\sigma[S] = -\sum_{\alpha} \mathbf{j}_{\alpha} \cdot grad(\frac{\mu_{\alpha} - v^2/2}{T}) + \frac{\sigma' : \nabla \mathbf{u}}{T} + \mathbf{Q} \cdot grad(\frac{1}{T})$$

4. 流体揺らぎ

我々は巨視的保存量の集合を考えることにする。

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{j} \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

ここでρは質量密度、$\mathbf{j}$ は運動量密度、εはエネルギー密度である。

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$$

内部エネルギー密度を e とすると、

$$\varepsilon = \rho \frac{v^2}{2} + e$$

時刻 t においてこれらの物理量が実現する確率汎関数を $P(\{\alpha\}, t)$ とする。平衡状態においては

$$P_{eq}(\{\alpha\}) \propto \exp(\frac{S}{k_B})$$

となる。ここで Sは全系のエントロピーで

$$S = \int d^3\mathbf{r} \quad s(\mathbf{r}, t)$$

と表される。

ここで、一般の非平衡状態において確率汎関数は関数空間における Fokker-Planck 方程式に従うものとする。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\{\alpha\}, t) = \int d^3\mathbf{r} \sum_i \frac{\delta}{\delta \alpha_i(\mathbf{r})} [F_i(\mathbf{r}) P(\{\alpha\}, t)]$$

$$+ \int d^3\mathbf{r} \sum_{ij} \frac{\delta}{\delta \alpha_i(\mathbf{r})} \int d^3\mathbf{r}' D_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')[-\frac{\delta S}{\delta \alpha_j(\mathbf{r}')} + \frac{\delta}{\delta \alpha_j(\mathbf{r}')}] P(\{\alpha\}, t)$$

もし

$$\int d^3\mathbf{r}\sum_j[\frac{\delta F_j(\mathbf{r})}{\delta\alpha_j(\mathbf{r})}+F_j(\mathbf{r})\frac{\delta S}{\delta\alpha_j(\mathbf{r})}]=0$$

でかつ、$D_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ が行列として正値であれば、Fokker-Planck 方程式が漸近安定性をもつことを示すことができる。そのために H 関数を導入する。

$$H(t)\equiv\int\delta\alpha\ \ P(\{\alpha\},t)\ln\frac{P(\{\alpha\},t)}{P_{eq}(\{\alpha\})}$$

$$=\int\delta\alpha\ \ P(\{\alpha\},t)[\ln P(\{\alpha\},t)-S(\{\alpha\})]$$

とおくと、

$$\frac{dH}{dt}=\int\delta\alpha\ \ [\frac{\partial P}{\partial t}(\ln P-S)+\frac{\partial P}{\partial t}]=\int\delta\alpha\frac{\partial P}{\partial t}(\ln P-S)$$

ここで、規格化条件

$$\int\delta\alpha\ \ P(\{\alpha\},t)=1$$

を用いた。よって Fokker-Planck 方程式より

$$\frac{dH}{dt}=-\sum_i\int\delta\alpha[\frac{\delta}{\delta\alpha_i(\mathbf{r})}\{F_i(\mathbf{r})P\}](\ln P-S)$$

$$+\sum_{ij}\int\delta\alpha\ \ [\frac{\delta}{\delta\alpha_i(\mathbf{r})}D_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}')(-\frac{\delta S}{\delta\alpha_j(\mathbf{r}')}+\frac{\delta}{\delta\alpha_j(\mathbf{r}')})P](\ln P-S)$$

ここで部分積分を行うと、

$$\frac{dH}{dt}=\sum_i\int\delta\alpha\ \ \{F_i(\mathbf{r})P\}(\frac{1}{P}\frac{\delta P}{\delta\alpha_i(\mathbf{r})}-\frac{\delta S}{\delta\alpha_i(\mathbf{r})})$$

$$-\sum_{ij}\int\delta\alpha\ [D_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}')(-\frac{\delta S}{\delta\alpha_j(\mathbf{r}')}+\frac{\delta}{\delta\alpha_j(\mathbf{r}')})P](\frac{1}{P}\frac{\delta}{\delta\alpha_i(\mathbf{r})}P-\frac{\delta S}{\delta\alpha_i(\mathbf{r})})$$

よって

$$\frac{dH}{dt}=\sum_i\int\delta\alpha\{F_i(\mathbf{r})\frac{\delta P}{\delta\alpha_i(\mathbf{r})}-F_i(\mathbf{r})P\frac{\delta S}{\delta\alpha_i(\mathbf{r})})$$

$$-\sum_{ij}\int\delta\alpha\frac{D_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{P}(-\frac{\delta S}{\delta\alpha_j(\mathbf{r}')}P+\frac{\delta P}{\delta\alpha_j(\mathbf{r}')})][\frac{\delta P}{\delta\alpha_i(\mathbf{r})}-\frac{\delta S}{\delta\alpha_i(\mathbf{r})}P]$$

第一項は上の条件を使うと

$$\int \delta\alpha \sum_i \int d\mathbf{r} \frac{\delta}{\delta\alpha_i(\mathbf{r})}\{F_i(\mathbf{r})P\}$$

という形にまとまり、積分で落ちる。第二項は二次形式になっているから D_{ij} の正値性によって負である。よって H 関数は単調減少関数である。

$$\frac{dH}{dt} \leq 0$$

一方、

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$$

を用いると、

$$H = \int \delta\alpha P \ln \frac{P}{P_{eq}} \geq \int \delta\alpha P(1 - \frac{P_{eq}}{P})$$

$$= \int \delta\alpha (P - P_{eq}) = 1 - 1 = 0$$

よって H はある値に漸近する。

ここで $F_i(\mathbf{r})$ として

$$F_i(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} -\nabla \cdot \mathbf{j} \\ -\nabla(\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) - \nabla P \\ -\nabla\{\mathbf{v}(\varepsilon + P)\} \end{bmatrix}$$

とおく。ただし、$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ とおいた。$F_i(\mathbf{r})$ は、流体方程式において可逆な変化を表す部分である。

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}}{\rho}$$

次にモーメントについての方程式を求めてみよう。一次モーメントは

$$< \alpha_i(\mathbf{r}) >= \int \delta\alpha \ \ \alpha_i(\mathbf{r}) P(\{\alpha\}, t)$$

で定義される。部分積分により、

$$\frac{\partial}{\partial t} < \alpha_i(\mathbf{r}) >=< F_i(\mathbf{r}) > - \sum_j \int d^3\mathbf{r}' \ \ < D_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\delta S}{\delta\alpha_j(\mathbf{r}')} >$$

$$+k_B\Psi_i(\mathbf{r})$$

ここで、

$$\Psi_i(\mathbf{r})=\sum_j\int d^3\mathbf{r}' < \frac{\delta}{\delta\alpha_j(\mathbf{r}')}D_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}') >$$

Boltzmann 定数を微小パラメーターとする。すなわち、揺らぎの小さい極限で考えることにすると、現象論的方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_i(\mathbf{r})=F_i(\mathbf{r})-\sum_j\int d^3\mathbf{r}'D_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\delta S}{\delta\alpha_j(\mathbf{r}')}$$

で与えられる。

次に、実際に上で述べた条件、

$$\int d^3\mathbf{r}\sum_j[\frac{\delta F_j(\mathbf{r})}{\delta\alpha_j(\mathbf{r})}+F_j(\mathbf{r})\frac{\delta S}{\delta\alpha_j(\mathbf{r})}]=0$$

が満たされることを示す。先ず、

$$\frac{\delta F_j(\mathbf{r})}{\delta\alpha_j(\mathbf{r})}=0$$

である。なぜなら、

$$\frac{\delta F_\rho(\mathbf{r})}{\delta\rho(\mathbf{r}')}=0$$

は明かである。次に、

$$\frac{\delta F_{j_i}(\mathbf{r})}{\delta j_k(\mathbf{r}')}=-\delta_{ik}(\frac{j_\ell}{\rho})\frac{\partial}{\partial x_\ell}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\frac{j_i}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_k}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

よって

$$\frac{\delta F_{j_i}(\mathbf{r})}{\delta j_i(\mathbf{r})}=-(\frac{j_\ell}{\rho})\frac{\partial}{\partial x_\ell}\delta(0)-(\frac{j_i}{\rho})\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(0)$$

しかるに、delta関数は偶関数であるから$\delta'(0)=0$である。よって

$$\frac{\delta F_{j_i}(\mathbf{r})}{\delta j_i(\mathbf{r})}=0$$

また、

$$\frac{\delta F_\varepsilon(\mathbf{r})}{\delta\varepsilon(\mathbf{r}')}=-\frac{j_k}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_k}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

これも同様に、$\mathbf{r}=\mathbf{r}'$で 0 となる。

次に

$$\sum_i \int d^3\mathbf{r} F_i(\mathbf{r}) \frac{\delta S}{\delta \alpha_i(\mathbf{r})} = 0$$

を示すことができる。

$$\sum_i \int d^3\mathbf{r} \quad F_i(\mathbf{r}) \frac{\delta S}{\delta \alpha_i(\mathbf{r})}$$

$$= -\int d^3\mathbf{r} \quad [(\nabla \cdot \mathbf{j}) \frac{\delta S}{\delta \rho} + \nabla : (\frac{\mathbf{jj}}{\rho} + P\mathbf{1}) \frac{\delta S}{\delta \mathbf{j}} + \nabla \cdot (\mathbf{v}(\varepsilon + P)) \frac{\delta S}{\delta \varepsilon}]$$

$$= \int d^3 \quad \mathbf{r}[(\nabla \cdot \mathbf{j}) \frac{1}{T} (\mu - \frac{v^2}{2}) - \{\nabla \cdot (\rho \mathbf{vv} + P\mathbf{1})\} \frac{\mathbf{v}}{T} - \{\nabla \cdot (\mathbf{v}(\varepsilon + P)) \frac{1}{T}]$$

$$= \int d^3\mathbf{r} \quad [(\nabla \frac{1}{T}) \cdot \mathbf{v}(\rho\mu + \rho \frac{v^2}{2} - \varepsilon - P) + \rho \mathbf{v} \cdot (\frac{1}{T} \nabla \mu) - \frac{\mathbf{v}}{T} \cdot \nabla P]$$

ここで Gibbs-Duhem 関係式

$$Ts = \varepsilon - \rho\mu + P - \rho \frac{v^2}{2}$$

を用いると、

$$\sum_i \int d^3\mathbf{r} \quad F_i(\mathbf{r}) \frac{\delta S}{\delta \alpha_i(\mathbf{r})}$$

$$= \int d^3\mathbf{r} \quad \mathbf{v} \cdot [-Ts \nabla (\frac{1}{T}) + \frac{\rho}{T} \nabla \mu - \frac{1}{T} \nabla P]$$

$$= \int d\mathbf{r} \quad \mathbf{r} \cdot [s \nabla T + \rho \nabla \mu - \nabla P] \frac{1}{T}$$

さらに、

$$s dT = \rho d\mu + dP$$

より

$$s \nabla T + \rho \nabla \mu - \nabla P = 0$$

従って、用いて求める結果を得る。

次に、$D_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を選ぶ。密度については散逸項はないから

$$D_{\rho\ell}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$$

ここで

$$D_{\rho j_\ell}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$$

を

$$D_{\rho\ell}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$$

と略記した。

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{j}} = -\frac{\mathbf{v}}{T},$$
$$\frac{\delta S}{\delta \varepsilon} = \frac{1}{T}$$

を考慮すると、

$$D_{k\ell}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x'_n}\eta T\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta_{k\ell}$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x'_\ell}(\zeta - \frac{2}{3}\eta)T\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x_\ell}\eta T\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$
$$D_{k\varepsilon}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x'_n}\eta T v_k \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x'_\ell}(\zeta - \frac{2}{3}\eta)T v_\ell \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x_\ell}\eta T v_\ell \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$
$$D_{k\rho}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = D_{\rho k}(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = 0$$

とおけば、

$$\sum_\ell \int d\mathbf{r}' D_{k\ell}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\delta S}{\delta j_\ell(\mathbf{r}')} + \int d\mathbf{r}' D_{k\varepsilon}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\delta S}{\delta \varepsilon(\mathbf{r}')}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_\ell}[\eta(\frac{\partial v_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial v_\ell}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{k\ell} div\mathbf{v}) + \zeta\delta_{k\ell} div\mathbf{v})]$$

が得られる。これは正に Navier-Stokes 方程式における粘性項である。

さらに、

$$D_{\varepsilon k}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = D_{k\varepsilon}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$$
$$D_{\varepsilon\varepsilon}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x'_n}\lambda\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x'_n} v_\ell v_\ell \eta T \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x'_\ell} v_k v_\ell (\zeta - \frac{2}{3}\eta) T \delta([\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x_\ell} v_k v_\ell \eta T \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \frac{\partial^2}{\partial x'_K \partial x_\ell} v_k v_\ell \eta T \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon + div[\mathbf{v}(\varepsilon + P)] + \frac{\partial}{\partial x_n}\lambda \frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{1}{T}) = \frac{\partial}{\partial x_k}(v_k \sigma'_{\ell k})$$

が得られる。

これより、揺らぎを導入した流体方程式を

$$\frac{\partial}{\partial t} j_k + \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\rho v_k v_\ell) + \frac{\partial P}{\partial x_\ell} = \frac{\partial}{\partial x_\ell}\sigma'_{k\ell} + R_k(\mathbf{r}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k}[v_k(\varepsilon + P)] + \frac{\partial}{\partial x_n}\lambda \frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{1}{T}) = \frac{\partial}{\partial x_k}(v_\ell \sigma'_{\ell k}) + R_\varepsilon(\mathbf{r}, t)$$

と表すと、Fokker-Planck 方程式と矛盾しないためには、

$$< R_k(\mathbf{r}, t) R_\ell(\mathbf{r}', t') >= 2k_B D_{k\ell}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\delta(t-t')$$

$$< R_\varepsilon(\mathbf{r}, t) R_\varepsilon(\mathbf{r}', t') >= 2D_{\varepsilon\varepsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\delta(t-t')$$

$$< R_k(\mathbf{r}, t) R_\varepsilon(\mathbf{r}', t') >= 2D_{k\varepsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\delta(t-t')$$

となることが要請される。

$$D_{k\ell}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x'_j}[\delta_{ij}\delta_{k\ell}\eta T + \delta_{ik}\delta_{j\ell}(\zeta - \frac{2}{3}\eta)T + \delta_{i\ell}\delta_{jk}\eta T]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

とも表現できるので、運動量密度 $\mathbf{j}$ に対する揺動力 $R_k(\mathbf{r}, t)$ を

$$R_k(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial x_\ell} S_{k\ell}(\mathbf{r}, t)$$

とおくことができ、

$$< S_{ik}(\mathbf{r}, t) S_{j\ell}(\mathbf{r}', t') >$$

$$= T[\eta(\delta_{ij}\delta_{k\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{j\ell}) + \zeta\delta_{ik}\delta_{j\ell}]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')$$

と仮定することに等しい。$S_{ik}(\mathbf{r},t)$ は「揺動応力」と呼ぶべきものである。

全エネルギーに対する揺動力は速度 $\mathbf{v}$ に依存し、ガリレー不変性を破っているので、一見おかしく見えるが、全エネルギーは速度の自乗の項をもつからガリレー変換で。の性質を見るためには、全エネルギー密度に対する方程式を内部エネルギー密度に対する式に変換する。

$$\frac{\partial e}{\partial t} + div(e\mathbf{v}) + Pdiv\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial x_n}\lambda\frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{1}{T})$$
$$= \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\sigma'_{ji} + R_\varepsilon(\mathbf{r},t) - v_k R_k(\mathbf{r},t)$$

となるから、内部エネルギーに対する揺動力は

$$R_e(\mathbf{r},t) = R_\varepsilon(\mathbf{r},t) - v_k R_k(\mathbf{r},t)$$

となる。この分散を

$$< R_e(\mathbf{r},t)R_e(\mathbf{r}',t') >= 2D_{ee}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\delta(t'-t)$$

とおくと

$$D_{ee}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = D_{\varepsilon\varepsilon}(\mathbf{r},\mathbf{r}') - v_k(\mathbf{r})D_{k\varepsilon}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$$
$$-D_{\varepsilon k}(\mathbf{r},\mathbf{r}')v_k(\mathbf{r}') + v_k(\mathbf{r})D_{k\ell}(\mathbf{r},\mathbf{r}')v_\ell(\mathbf{r}')$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x'_n}\lambda\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + T\sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

これは

$$R_e(\mathbf{r},t) \equiv -div\mathbf{q}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}S_{ji}(\mathbf{r},t)$$

とおいて

$$< q_k(\mathbf{r},t)q_\ell(\mathbf{r}',t') >= 2\lambda\delta_{k\ell}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

とおくことに対応する。つまり、$\mathbf{q}$ は揺動熱流である。通常

$$\lambda = \kappa T^2$$

とおく。このとき、

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\lambda\frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{1}{T}) = -\kappa\Delta T$$

κは「熱伝導率」と呼ばれる。